

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM KHÁNH TÙNG

MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP  
VỀ THIẾT DIỆN DÀNH CHO  
HỌC SINH GIỎI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM KHÁNH TÙNG

MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP  
VỀ THIẾT DIỆN DÀNH CHO  
HỌC SINH GIỎI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP  
Mã số: 60 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC  
PGS.TS. TRỊNH THANH HẢI

THÁI NGUYÊN - 2016

# Mục lục

Mở đầu	1
<b>Chương 1. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ</b>	<b>3</b>
1.1 Khái niệm thiết diện . . . . .	3
1.2 Thiết diện của một số hình thường gặp . . . . .	3
1.2.1 Thiết diện của hình cầu . . . . .	3
1.2.2 Thiết diện của hình nón . . . . .	3
1.2.3 Thiết diện của hình trụ tròn xoay . . . . .	5
1.2.4 Thiết diện của hình đa diện lồi . . . . .	5
1.3 Các định lý, tính chất thường dùng . . . . .	6
1.4 Một số bài toán cơ bản về xác định thiết diện . . . . .	9
1.4.1 Mặt phẳng cắt qua ba điểm cho trước . . . . .	9
1.4.2 Mặt phẳng cắt qua một điểm và song song với một mặt phẳng (hoặc hai đường thẳng cắt nhau) . . . . .	10
1.4.3 Mặt phẳng cắt qua hai điểm (chứa một đường thẳng cho trước) và song song với một đường thẳng . . . . .	12
1.4.4 Mặt phẳng cắt qua một điểm và song song với hai đường thẳng chéo nhau . . . . .	14
1.4.5 Mặt phẳng cắt qua hai điểm (chứa một đường thẳng cho trước) và vuông góc với một mặt phẳng . . . . .	15
1.4.6 Mặt phẳng cắt qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng . . . . .	16

<b>Chương 2. MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP VỀ THIẾT DIỆN</b>	<b>19</b>
2.1 Dạng bài tập liên quan đến diện tích của thiết diện . . . . .	19
2.1.1 Tính diện tích thiết diện . . . . .	20
2.1.2 Tìm điều kiện để diện tích thiết diện đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất . . . . .	44
2.2 Dạng bài tập về xác định hình dạng thiết diện . . . . .	61
2.3 Dạng bài tập thiết diện phụ thuộc vào điểm di động . . . . .	78
<b>Kết luận</b>	<b>96</b>
<b>Tài liệu tham khảo</b>	<b>97</b>

# MỞ ĐẦU

Trong chương trình Toán phổ thông nói chung, trong các dạng bài tập, đề thi học sinh giỏi nói riêng thì các bài tập về thiết diện rất phong phú, đa dạng.

Với mong muốn tìm hiểu, học hỏi và tích lũy thêm kinh nghiệm chuyên môn, tôi chọn hướng nghiên cứu của luận văn Thạc sĩ với đề tài: "Một số dạng bài tập về thiết diện dành cho học sinh giỏi" với nhiệm vụ:

1. Hệ thống hóa để chọn lọc một số dạng bài tập về thiết diện thường xuất hiện trong các đề thi học sinh giỏi.
2. Đưa ra lời giải tường minh cho một số bài tập dành cho học sinh giỏi, một số bài tập khó mà tài liệu tham khảo chưa đưa ra lời giải chi tiết.

Cấu trúc phần nội dung của luận văn:

- Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Chương này đề cập, trình bày các kiến thức cơ sở về mặt phẳng, giao tuyến, thiết diện và những kiến thức nền tảng áp dụng trong việc giải các bài tập của chương 2.

- Chương 2. Một số dạng bài tập về thiết diện

Đây là nội dung trọng tâm của luận văn. Các bài tập dành cho học sinh giỏi về thiết diện được trình bày có hệ thống với những bài tập khó theo từng dạng.

Luận văn này được thực hiện tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn, chỉ bảo tận tình của PGS.TS. Trịnh Thanh Hải cùng sự giúp đỡ, tạo điều kiện của các thầy giáo, cô giáo khoa Toán-Tin trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và các thầy cô giáo tham gia giảng dạy lớp Thạc sĩ chuyên ngành Phương pháp toán sơ cấp (Khóa 8).

Tác giả xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới các thầy cô Lãnh đạo trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Sở GDĐT tỉnh Yên Bái, Phòng GDĐT thành

phó Yên Bái cùng tập thể lớp Thạc sĩ chuyên ngành Phương pháp toán sơ cấp đã động viên, giúp đỡ tác giả trong khóa học và quá trình hoàn thành luận văn.

Thực hiện luận văn này, tác giả đã đầu tư nhiều thời gian, tham khảo nhiều tài liệu, cẩn thận trong trình bày để thực hiện luận văn này nhưng không thể tránh khỏi những hạn chế. Tác giả kính mong được sự góp ý của quý thầy cô và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin chân thành cảm ơn !

*Thái Nguyên, tháng 6 năm 2016*

**Tác giả**

**Phạm Khánh Tùng**

## Chương 1

# KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

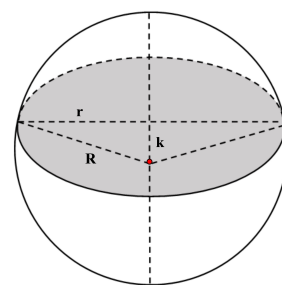
### 1.1 Khái niệm thiết diện

Hình phẳng có được do cắt một hình khối  $T$  bằng một mặt phẳng  $(P)$  gọi là thiết diện của hình khối  $T$  cắt bởi mặt phẳng  $(P)$ .

### 1.2 Thiết diện của một số hình thường gặp

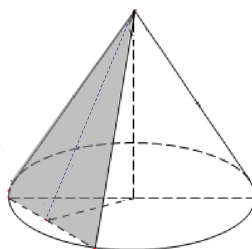
#### 1.2.1 Thiết diện của hình cầu

Mặt phẳng  $(P)$  cắt hình cầu  $T$  luôn cho ta một thiết diện là một hình tròn bán kính  $r = \sqrt{R^2 - k^2}$ . Trong đó  $R$  là bán kính hình cầu;  $k$  là khoảng cách từ mặt phẳng tới tâm hình cầu ( $0 \leq k < R$ ). (Hình 1.1)



Hình 1.1.

#### 1.2.2 Thiết diện của hình nón



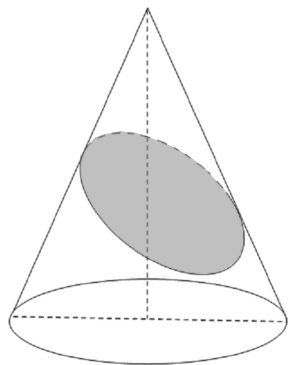
Hình 1.2.

- Mặt phẳng qua đỉnh, cắt hình nón theo hai đường sinh ta được thiết diện là một tam giác cân. (*Hình 1.2*)

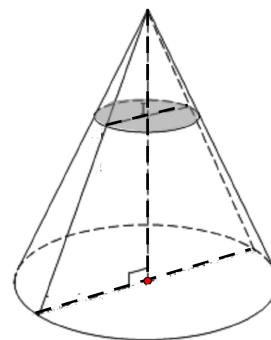
- Cắt hình nón bởi mặt phẳng không qua đỉnh:

+ Nếu mặt phẳng cắt tất cả các đường sinh của hình nón thì ta được thiết diện là một hình elip (*Hình 1.3*). Đặc biệt trong trường hợp này, mặt phẳng vuông góc với trục hình nón thì thiết diện thu được là một hình tròn có tâm nằm trên trục hình nón. (*Hình 1.4*)

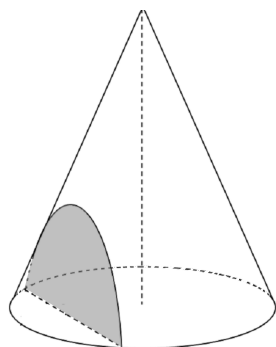
+ Nếu mặt phẳng song song với hai đường sinh của hình nón thì thiết diện thu được là một hình phẳng giới hạn bởi các giao tuyến của mặt phẳng đó với mặt đáy của hình nón (là một đoạn thẳng) và mặt bên của hình nón (là một đường cong thuộc một nhánh của một hypebol). (*Hình 1.5*)



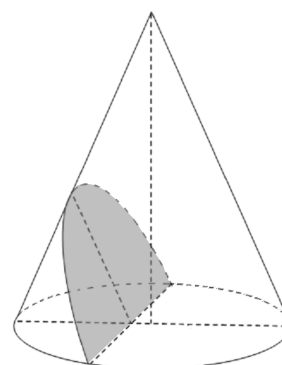
**Hình 1.3.**



**Hình 1.4.**



**Hình 1.5.**



**Hình 1.6.**

+ Nếu mặt phẳng song song với một đường sinh của hình nón thì thiết diện thu được là một hình phẳng giới hạn bởi các giao tuyến của mặt phẳng đó với



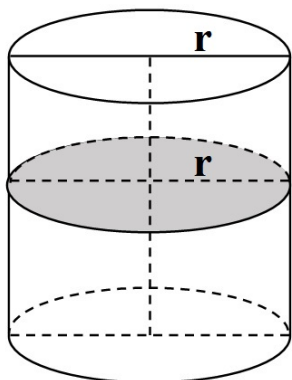
mặt đáy của hình nón (là một đoạn thẳng) và mặt bên của hình nón (là một phần đường cong parabol). (Hình 1.6)

### 1.2.3 Thiết diện của hình trụ tròn xoay

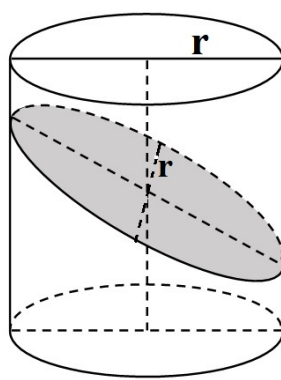
- Thiết diện của hình trụ tròn xoay (bán kính  $r$ ) bị cắt bởi một mặt phẳng vuông góc với trục hình trụ là một hình tròn có tâm nằm trên trục hình trụ, có bán kính bằng  $r$ . (Hình 1.7)

- Thiết diện của hình trụ tròn xoay (bán kính  $r$ ) bị cắt bởi mặt phẳng hợp với trục hình trụ một góc  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 90^\circ$ ) cắt tất cả các đường sinh của hình trụ là một hình elip có trục nhỏ bằng  $2r$  và trục lớn bằng  $\frac{2r}{\sin \alpha}$ . (Hình 1.8)

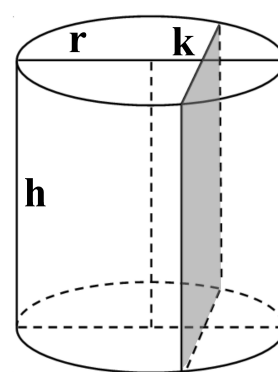
- Thiết diện của hình trụ tròn xoay (bán kính  $r$ ) bị cắt bởi mặt phẳng song song với trục hình trụ, cách trục hình trụ một khoảng  $k$  ( $0 \leq k < r$ ) là một hình chữ nhật có hai cạnh có độ dài bằng chiều cao hình trụ, hai cạnh còn lại có độ dài bằng  $2\sqrt{r^2 - k^2}$ . (Hình 1.9)



Hình 1.7.



Hình 1.8.



Hình 1.9.

### 1.2.4 Thiết diện của hình đa diện lồi

Để xác định thiết diện của khối đa diện lồi  $T$  (gọi tắt là hình  $T$ ) cắt bởi mặt phẳng ( $P$ ) ta thường thực hiện qua các bước sau:

**Bước 1.** Xác định giao tuyến của mặt phẳng ( $P$ ) với một mặt nào đó của hình  $T$  gọi là giao tuyến gốc (giao tuyến này thường dễ dàng xác định được dựa vào giả thiết của đề bài).

**Bước 2.** Xác định giao điểm của giao tuyến gốc với các cạnh của hình  $T$ .

**Bước 3.** Từ các giao điểm trên, xác định các giao tuyến còn lại của mặt phẳng ( $P$ ) với các mặt của hình  $T$ .

**Bước 4.** Chỉ ra phần hình phẳng trong mặt phẳng ( $P$ ) giới hạn bởi các giao tuyến trên là thiết diện cần xác định.

Thực chất quy trình trên là tìm giao của mặt phẳng ( $P$ ) với các mặt của hình  $T$  (Mặt phẳng ( $P$ ) có thể không cắt hết các mặt của hình  $T$ ).

Hình dạng của thiết diện là đa giác lồi có các đỉnh là giao điểm của mặt phẳng ( $P$ ) với các cạnh của hình  $T$ .

### 1.3 Các định lý, tính chất thường dùng

*\* Quan hệ song song, quan hệ vuông góc:*

**Định lí 1.1.** [9] Trong không gian, cho đường thẳng  $d$  và điểm  $A$  ngoài  $d$ . Lúc đó tồn tại duy nhất một đường thẳng  $a$  đi qua  $A$  và song song với đường thẳng  $d$ .

**Mệnh đề 1.1.** [9] Nếu hai mặt phẳng chứa lần lượt hai đường thẳng song song với nhau và hai mặt phẳng đó cắt nhau theo một đường thẳng thì đường thẳng này song song với cả hai đường thẳng trên hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

**Mệnh đề 1.2.** [9] Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

**Định lí 1.2.** [9] Cho mặt phẳng ( $\alpha$ ) và đường thẳng  $d$  không thuộc ( $\alpha$ ). Khi đó,  $d$  và ( $\alpha$ ) song song với nhau khi và chỉ khi tồn tại một đường thẳng  $a$  thuộc ( $\alpha$ ) sao cho  $d$  và  $a$  song song với nhau.

**Mệnh đề 1.3.** [9] Nếu hai mặt phẳng cùng song song hoặc chứa một đường thẳng và chúng cắt nhau theo giao tuyến là một đường thẳng thì giao tuyến này song song hoặc trùng với đường thẳng trên.

**Định lí 1.3.** [9] Cho điểm  $P$  và hai đường thẳng  $a, b$  chéo nhau. Khi đó tồn tại duy nhất một mặt phẳng ( $\alpha$ ) đi qua điểm  $P$  sao cho ( $\alpha$ ) song song hoặc chứa  $a$  và song song hoặc chứa  $b$ .

**Mệnh đề 1.4.** [9] Cho điểm  $P$  và hai đường thẳng  $a, b$  chéo nhau sao cho  $P$  không thuộc  $a$  và  $b$ . Giả sử đường thẳng  $a$  không song song với mặt phẳng ( $P; b$ )